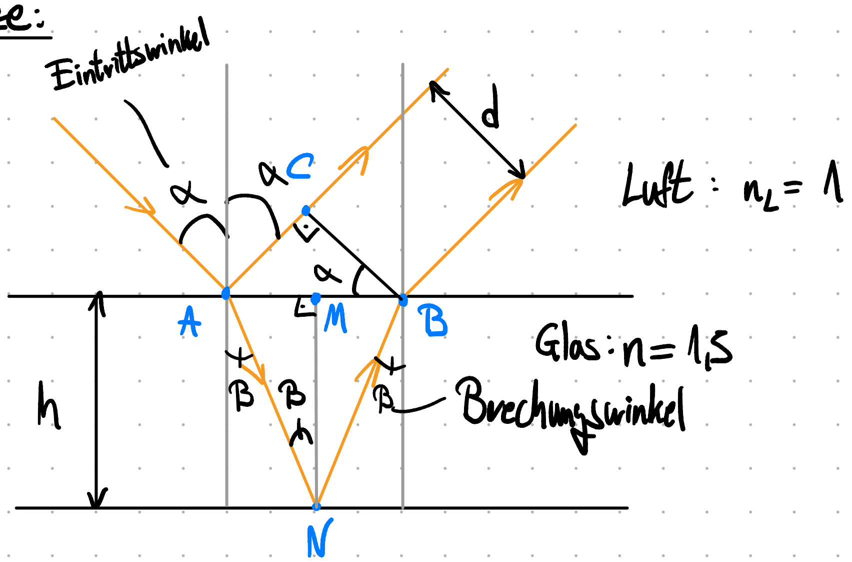
1) Ein Lichtstrahl fällt unter 75° auf eine 15 mm dicke Glasplatte der Brechzahl 1,5, die auf der Rückseite versilbert ist. Ein Teil des Lichtes dringt in das Glas ein und wird an der Unterseite reflektiert, ein Teil wird an der Oberseite reflektiert.

a) Drücke den Abstand d der beiden parallel austretenden Strahlen in Funktion von Einfallswinkel α, Plattendicke h und Brechzahl n aus!

b) Bestimme den Abstand d!

a) Skizze:



Brechungsgesetz in A:

$$\sin(\alpha)\cdot \underbrace{n_L}_{=1} = \sin(\beta)\cdot n \iff \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n} \quad (*)$$

Im Dreieck ABC:

$$d = \cos(\alpha)\cdot AB = \cos(\alpha)\cdot 2\cdot AM \quad (1)$$

Im Dreieck AMN:

$$\tan(\beta) = \frac{AM}{h} \iff AM = \tan(\beta)\cdot h \quad (2)$$

(2) in (1): $$d = \cos(\alpha)\cdot 2\cdot \tan(\beta)\cdot h$$

$$\iff d = \cos(\alpha)\cdot 2\cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\cdot h$$

$$\iff d = 2\cdot h\cdot \cos(\alpha)\,\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cdot n}$$

Trigonometrische Formel: $\cos(\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\beta)}$

mit ⊛:

$$= \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{n^2}}$$

Also: $$d = 2\cdot h\cdot \cos(\alpha)\,\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(\alpha)}{n^2}}\cdot n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = 2\cdot h\cdot \frac{\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\alpha)}}}$$

b) $$d = 2\cdot 15\,\text{mm}\cdot \frac{\cos(75°)\cdot\sin(75°)}{\sqrt{1{,}5^2-\sin(75°)}}$$

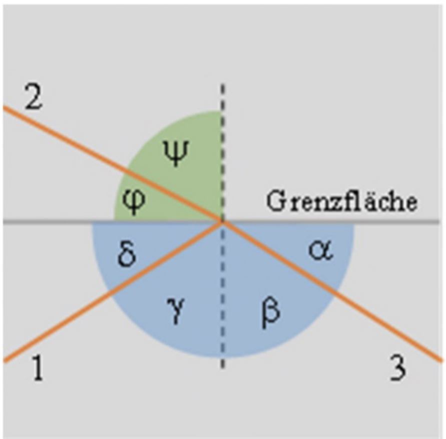
$d = 6{,}535\,\text{mm}$

2) Die Abbildung 1 zeigt den Weg eines Lichtstrahles beim Übergang von Glas in Luft.

a) Auf welcher Seite der Grenzfläche befindet sich das Glas?

b) Wo ist der einfallende, wo der reflektierte und wo der gebrochene Lichtstrahl?

c) Wo liegen Einfallswinkel, Reflexionswinkel und Brechungswinkel?



a) Glas

b) einfallende Lichtstrahl: 3

reflektierte Lichtstrahl: 1

gebrochene Lichtstrahl: 2

c) Einfallswinkel: β

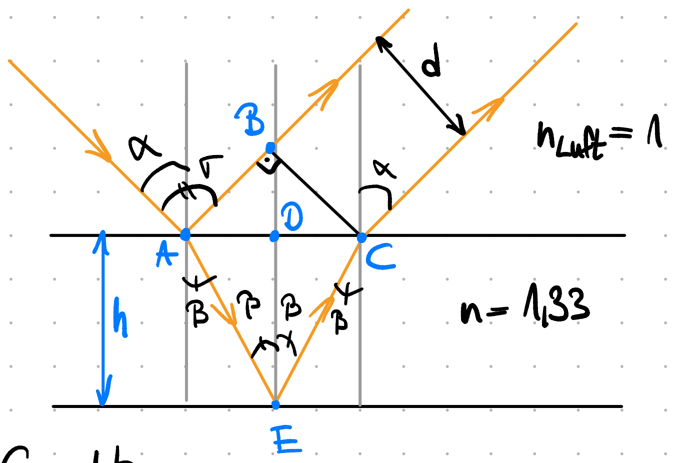
Refektionswinkel: γ

Brechungswinkel: ψ

3) Ein schmales Lichtbündel trifft die Wasseroberfläche eines Aquariums unter dem Einfallswinkel von 45°. Der gebrochene Lichtstrahl fällt auf den Boden des Aquariums, trifft dort auf einen horizontal liegenden Spiegel, wird zurück zur Oberfläche reflektiert und an der Grenzfläche zur Luft gebrochen. Der Brechungsquotient des Wassers beträgt $n = 1{,}33$.

a) Wie groß ist der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Richtung, unter der das Licht die Wasseroberfläche wieder verlässt?

b) Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Punkten, in welchen der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl durch die Wasseroberfläche stoßen, wenn das Wasser 15 cm tief ist?



Eintrittswinkel : α

Brechungswinkel: β

Brechungsindex : n

a) Gesucht: γ

$$\gamma = 2 \cdot \alpha = 90°$$

Da Refektion : Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel

b) Gesucht: $\overline{AC}$

<u>Im Dreieck ADE:</u>

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AD}}{h} \quad (*)$$

<u>Brechungsgesetz</u>

mit $n_{Luft} = 1$: $\quad \sin(\alpha) = \sin(\beta) \cdot n$

$$\Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha)}{n}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\sin(45°)}{1{,}33}\right]$$

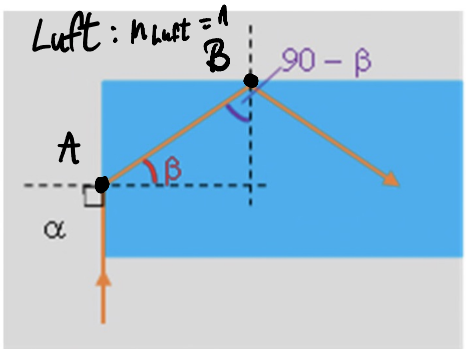
$$\underline{= 32{,}12°}$$

$$\circledast \iff AD = \tan(B)\cdot h$$
$$= \tan(32{,}12°)\cdot 15\,\text{cm}$$
$$\underline{= 9{,}42\,\text{cm}}$$

Daher: $AC = 2\cdot AD$
$$= 2\cdot 9{,}42\,\text{cm}$$
$$= 18{,}84\,\text{cm}$$

4) a) Welche Brechzahl muss ein zylindrischer Stab mindestens haben, damit alle durch seine Stirnfläche eintretenden Strahlen durch Totalreflexion weitergeleitet werden?

b) Wie groß ist der maximale Eintrittswinkel für $n = 1{,}33$?



2. Zur Aufgabe 4:
Seitlich darf kein Licht aus dem Glasstab austreten

a) Bedingung: Totalreflexion tritt ein wenn der Eintrittswinkel α größer ist als der Grenzwinkel β_G ist, also:

In Punkt B: $90° - \beta_G > \beta_G \iff 2\cdot\beta_G < 90°$
$$\iff \underline{\beta_G < 45°}$$

Brechungsgesetz: In A, mit $n_{Luft} = 1$: und $B = B_G - 90° = 45°$

$$\sin(\alpha) = \sin(B)\cdot \underset{\text{Brechzahl}}{n} \iff n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(B)} \quad (\alpha = 90°)$$

$$= \frac{\sin(90°)}{\sin(45°)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Also: Da: $B < 45°$ und $n \sim \frac{1}{\sin(B)}$, muss $n \geq \sqrt{2}$

b) In Punkt B:

Grenzwinkel: $\beta_G = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}33}\right) = \underline{48{,}75°}$

In Punkt A: $\beta = 90° - \beta_G$

$= 90° - 48{,}75°$

$= \underline{41{,}25°}$

Gesucht: α_{max}

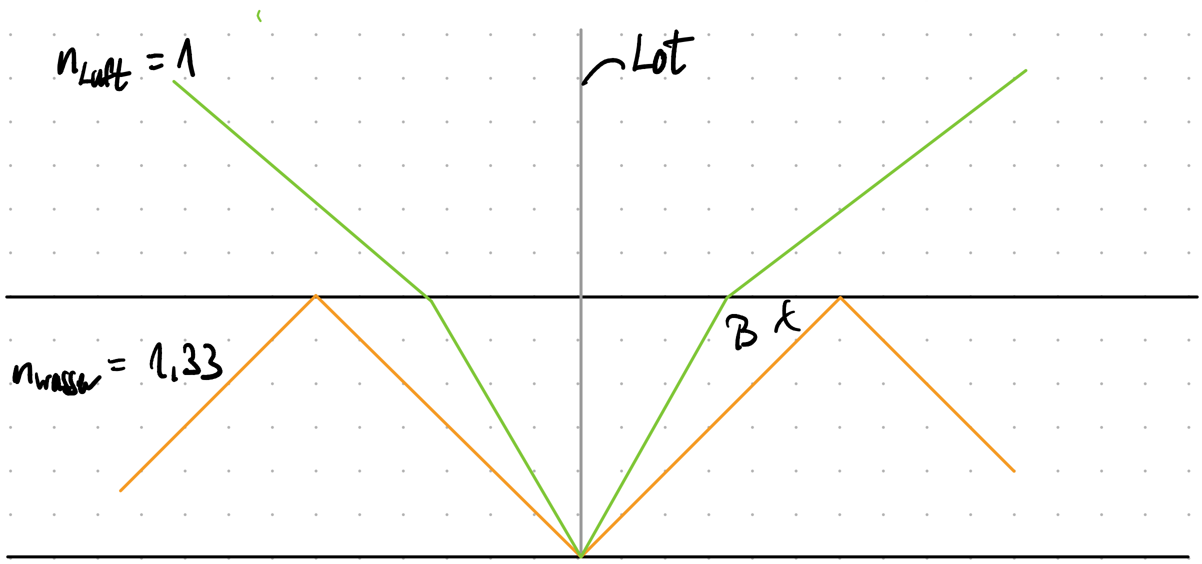
<u>Brechungsgesetz</u>: mit $n_{Luft} = 1$

$\sin(\alpha_{max}) = \sin(\beta) \cdot n \Leftrightarrow \alpha_{max} = \sin^{-1}[\sin(\beta) \cdot n]$

$= \sin^{-1}[\sin(41{,}25°) \cdot 1{,}33]$

$= 61{,}27°$

5) Ein Fisch schwimmt 50 cm unter einer ruhigen Wasseroberfläche (n = 1,33). Welche Gebiete außerhalb des Wassers kann er direkt sehen und welche Gebiete im Wasser kann er über eine Reflexion sehen (Skizze anfertigen)?



Der Fisch kann durch keine Gebiete sehen, bei denen Strahlen totalreflektiert werden.

Für Totalreflexion: Grenzwinkel: $\beta_G = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}33}\right)$

$= \underline{48{,}75°}$

6) In einer Wellenwanne ist ein flaches Gebiet von einem Gebiet mit tieferem Wasser geradlinig abgegrenzt. Eine ebene Welle läuft vom flachen Wasser ins tiefe Wasser. Der Einfallswinkel beträgt 45°, der Brechungswinkel ist 60°.

a) In welchem Verhältnis stehen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Welle in den beiden Gebieten?

b) In welchem Verhältnis stehen die Wellenlängen?

a) Gegeben: Einfallswinkel: $\alpha = 45°$

Brechungswinkel: $\beta = 60°$

Also: Brechungsgesetz

Lichtgeschwindigkeit

$$n_{Luft} \cdot \sin(\alpha) = n_{Wasser} \cdot \sin(\beta) \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_{Wasser}}{n_{Luft}} = \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}}$$

Brechzahl

$$\Leftrightarrow \frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}} = \frac{\sin(45°)}{\sin(60°)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

b) Formel: $\lambda = \frac{c}{f}$

Da die Frequenz von der änderung im Medium ungestört ist:

$$\frac{c_{Luft}}{c_{Wasser}} = \frac{\frac{\lambda_{Luft}}{\cancel{f}}}{\frac{\lambda_{Wasser}}{\cancel{f}}} = \frac{\lambda_{Luft}}{\lambda_{Wasser}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

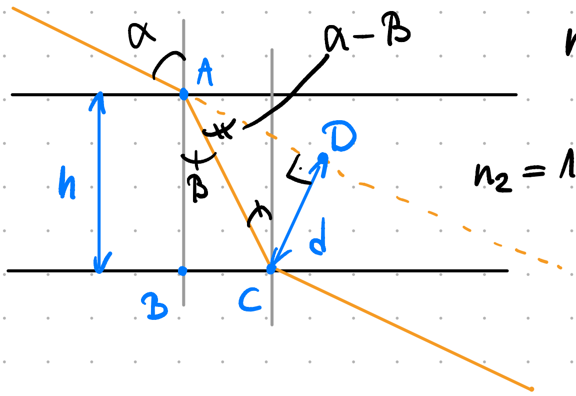
7) a) Eine Fensterscheibe der Dicke 5 mm besitzt die Brechzahl 1,5.

Welche Parallelverschiebung d ergibt sich bei einem Eintritts- winkel von 45°?

b) Ersetze in der Gleichung für d mit Hilfe des Brechungsgesetzes β durch α!

a) Gelöst mit Herleitung

Skizze:



$n_1 = 1$ (Luft)

$n_2 = 1{,}5$ (Glas)

Eintrittswinkel: α , Brechungswinkel: β

Berechnung β:

Formel: $\beta = \sin^{-1}\left[\sin(\alpha)\cdot\frac{n_1}{n_2}\right]$

n_1: Brechzahl von Luft

n_2: Brechzahl der Fensterscheibe

$$= \sin^{-1}\left[\sin(45°)\cdot\frac{1}{1{,}5}\right]$$

$$= 28{,}13°$$

In Dreieck ABC gilt: $\cos(\beta) = \frac{h}{AC}$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{h}{\cos(\beta)} \quad (*)$$

Im Dreieck ACD gilt:

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{d}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{d}{\sin(\alpha-\beta)}$$

In (*): $\frac{d}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{h}{\cos(\beta)}$

$$\Leftrightarrow d = h\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\beta)}$$

$$= 5\,mm\cdot\frac{\sin(45°-28{,}13°)}{\cos(28{,}13°)}$$

$$= 1{,}65\,\text{mm}$$

b) Es gilt: $d = h \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)}$ (*)

Brechungsgesetz: $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = 1{,}5 \cdot \sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha)}{1{,}5}\right]$$

In (*): $$\boxed{d = h \cdot \frac{\sin\left\{\alpha - \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha)}{1{,}5}\right]\right\}}{\cos\left\{\sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha)}{1{,}5}\right]\right\}}}$$

8) Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel $\alpha = 60°$ auf eine planparallele Glasplatte von 5 cm Dicke. Der Brechungsquotient der Platte beträgt $n = 1{,}5$. Die Platte ist von Luft umgeben. Berechnen Sie die Parallelverschiebung des durchgehenden Strahles!

Gelöst mit Formel:

$$d = h \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 - \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\alpha)}}\right)$$

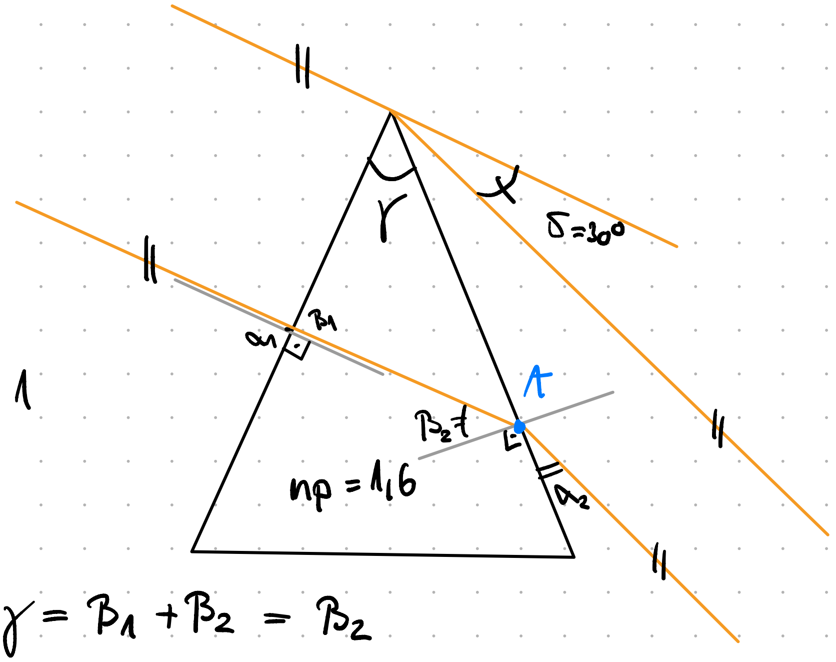
$$= 5\,\text{cm} \cdot \sin(60°) \cdot \left(1 - \frac{\cos(60°)}{\sqrt{1{,}5^2 - \sin^2(60)}}\right)$$

$$= 2{,}56\,\text{cm}$$

9) Ein Lichtstrahl trifft senkrecht auf die erste Fläche eines Glasprismas der Brechzahl 1,6 und wird insgesamt um 30° abgelenkt. Wie groß sind Austrittswinkel und brechender Winkel des Prismas?

Brechungsindex: n, Eintrittswinkel: α, Brechungswinkel: β, Prismenwinkel: γ

Luft: $n_L = 1$



Formel: $\gamma = \beta_1 + \beta_2 = \beta_2$

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = \alpha_2 - \gamma \quad (*)$$

also: $\delta = \alpha_2 - \beta_2 \quad (1)$

Brechungsgesetz: In Punkt A:

$$n_L \cdot \sin(\alpha_2) = n_P \cdot \sin(\beta_2)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_2) = 1{,}6 \cdot \sin(\beta_2) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_2) - 1{,}6 \cdot \sin(\beta_2) = 0$$

System:

$$\begin{cases} \alpha_2 - \beta_2 = \delta & (1) \\ \sin(\alpha_2) - 1{,}6 \cdot \sin(\beta_2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Austrittswinkel: hier α_2!

$(1) \Leftrightarrow \beta_2 = \alpha_2 - \delta$

In (2): $\sin(\alpha_2) - 1{,}6 \cdot \sin(\alpha_2 - \delta) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_2) - 1{,}6 \sin(\alpha_2)\cos(\delta) + 1{,}6 \cdot \cos(\alpha_2)\sin(\delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_2) - 1{,}6 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \cos(30°) + 1{,}6 \cdot \cos(\alpha_2)\sin(30°) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_2) - \frac{4\sqrt{3}}{5} \cdot \sin(\alpha_2) + \frac{4}{5}\cos(\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 - 4\sqrt{3}}{5} \cdot \sin(\alpha_2) = -\frac{4}{5}\cos(\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha_2)}{\cos(\alpha_2)} = \tan(\alpha_2) = -\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{5 - 4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{5-4\sqrt{3}}\right)$$

$$= 64{,}26°$$

und: $(*) \Leftrightarrow \gamma = \alpha_2 - \delta$

$$= 64{,}26° - 30°$$

$$= 34{,}26°$$

10) Ein monochromatischer Lichtstrahl fällt aus Luft kommend auf ein Prisma auf. Der brechende Winkel des Prismas beträgt 45° und die Brechungszahl ist 1,77.

a) Wie groß ist die Minimalablenkung und bei welchem Einfallswinkel tritt sie ein?

b) Der Strahl tritt unter einem Winkel von 60° ein. Berechne den Ablenkungswinkel!

c) Für welchen Einfallswinkel ist gerade noch Durchgang mit Austritt an der anderen Seitenfläche möglich?

a) Fraunhoferformel:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min}+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Gültig da der Prisma in Luft ist.

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\delta_{min}+\gamma}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \delta_{min} + \gamma = 2 \cdot \sin^{-1}\left[n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \delta_{min} = 2 \cdot \sin^{-1}\left[n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] - \gamma$$

$$= 2 \cdot \sin^{-1}\left[1{,}77 \cdot \sin\left(\frac{45°}{2}\right)\right] - 45°$$

$$= 40{,}27°$$

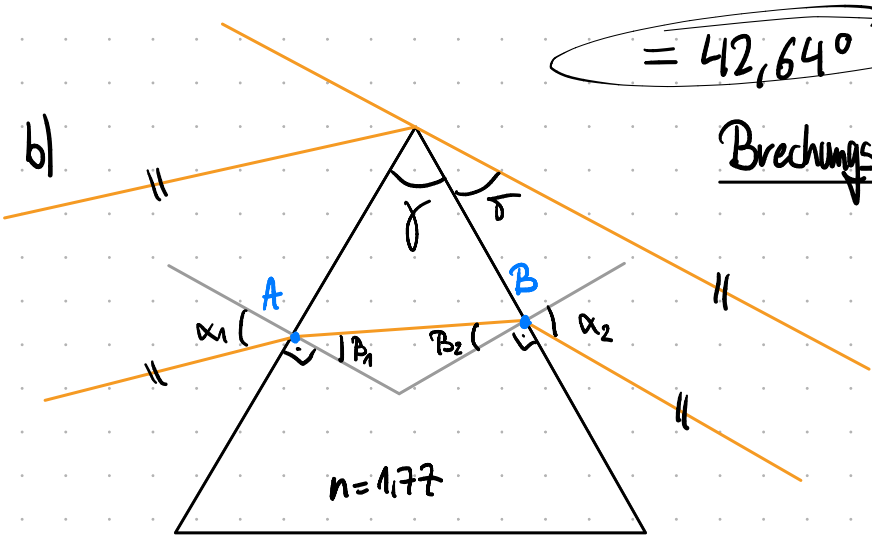
Bei Minimalablenkung gilt: $\delta_{min} = 2 \cdot \alpha_1 - \gamma$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}(\delta_{min} + \gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(45^\circ + 40{,}27^\circ)$$

$$= 42{,}64^\circ$$

b)



<u>Brechungsgesetz in A:</u>

$$1 \cdot \sin(\alpha_1) = n \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha_1)}{n}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\sin(60^\circ)}{1{,}77}\right]$$

$$\underline{= 29{,}29^\circ}$$

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 = \gamma - \beta_1$$

$$= 45^\circ - 29{,}29^\circ$$

$$= \underline{15{,}71^\circ}$$

<u>Brechungsgesetz in B</u>: $n \cdot \sin(\beta_2) = \sin(\alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_2 = \sin^{-1}\left[n \cdot \sin(\beta_2)\right]$

$$= \sin^{-1}\left[1{,}77 \cdot \sin(15{,}71^\circ)\right]$$

$$= 28{,}63^\circ$$

c) Also: Totalreflexion

Es folgt: $\alpha_2 = 90^\circ$, also: $\sin(\alpha_2) = n \cdot \sin(\beta_2)$ (oder Grenzfall)

$$\Leftrightarrow \beta_2 = \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha_2)}{n}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{1}{1{,}77}\right]$$

$$= 34{,}4^\circ$$

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 = \gamma - \beta_2$$
$$= 45^\circ - 34{,}4^\circ$$
$$\underline{= 10{,}60^\circ}$$

<u>Brechungsgesetz in A:</u>

$$\sin(\alpha_1) = n \cdot \sin(\beta_1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \sin^{-1}[n \cdot \sin(\beta_1)]$$
$$= \sin^{-1}[1{,}77 \cdot \sin(10{,}6^\circ)]$$
$$= 19{,}00^\circ$$

11) Ein monochromatischer Lichtstrahl fällt unter einem Winkel von 35° auf ein sich in Luft befindliches Glasprisma der Brechungszahl $n' = 1{,}55$ auf. Bei diesem Einfallswinkel kann der Strahl an der gegenüberliegenden Seitenfläche gerade noch in Luft austreten.

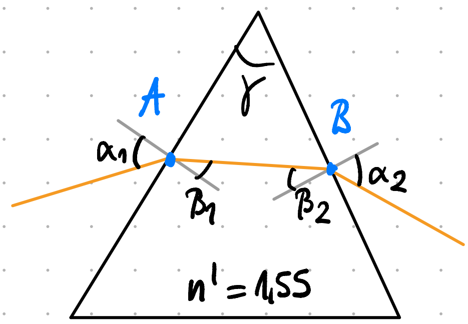
a) Berechne den brechenden Winkel des Glasprismas!

b) Das Glasprisma wird in eine Flüssigkeit der Brechungszahl n'' gestellt. Bei ansonsten unveränderten Versuchsbedingungen erleidet der einfallende Strahl nun Minimalablenkung. Berechne die Brechungszahl n'' und den Minimalablenkungs-winkel!

a) Grenzfall: Totalreflexion

n = 1 (Luft)

Gesucht: γ mit $\boxed{\gamma = \beta_1 + \beta_2}$



Es gilt: $\beta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n'}\right)$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}55}\right)$$

$$\underline{= 40{,}18^\circ}$$

Brechungsgesetz in A: $\sin(\alpha_1) = n \cdot \sin(\beta_1) \Leftrightarrow \beta_1 = \sin^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha_1)}{n}\right]$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\sin(35°)}{1{,}55}\right]$$

$$\underline{= 21{,}72°}$$

Also: $\gamma = \beta_1 + \beta_2$

$$= 21{,}72° + 40{,}18°$$

$$= 61{,}90°$$

b) Bei Minimalablenkung ist der Strahlengang im Prisma symetrisch.

<u>Es gilt:</u> $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

<u>In B:</u> $n'' \cdot \sin(\alpha) = n' \cdot \sin(\beta)$ ⊛

und $\gamma = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}\gamma$ ①

und $\delta_{min} = 2 \cdot \alpha - \gamma$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\delta_{min} - \gamma}{2} \quad ②$$

$$\delta_{min} = 2\alpha - \gamma$$

$$= 2 \cdot 35° - 61{,}9°$$

$$\underline{= 8{,}1°}$$

① und ② in ⊛: $n'' \cdot \sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right) = n' \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\gamma\right)$

$$\Leftrightarrow n'' = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\delta_{min}+\gamma}{2}\right)} \cdot n'$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot 61{,}90°\right)}{\sin\left(\frac{8{,}1° + 61{,}90°}{2}\right)} \cdot 1{,}55$$

$$= 1{,}39$$

12) Ein Glasprisma ist von Luft umgeben. Es hat den Brechungsquotienten $n = 1{,}7$. Sein brechender Winkel beträgt 60°.

a) Unter welchem Winkel muss der Lichtstrahl für symmetrischen Durchgang auffallen, und wie groß ist dann die Ablenkung?

b) Unter welchem Winkel muss der Lichtstrahl auffallen, damit er streifend aus dem Prisma tritt, und was geschieht, wenn der Einfallswinkel noch kleiner wird?

a) symetrischer Durchgang $\longrightarrow$ Minimalablenkung

Es gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

und: $\gamma = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} \cdot 60° = \underline{30°}$

Brechungsgesetz in Luft: $\sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta)$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left[n \cdot \sin(\beta)\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[1{,}7 \cdot \sin(30°)\right]$$

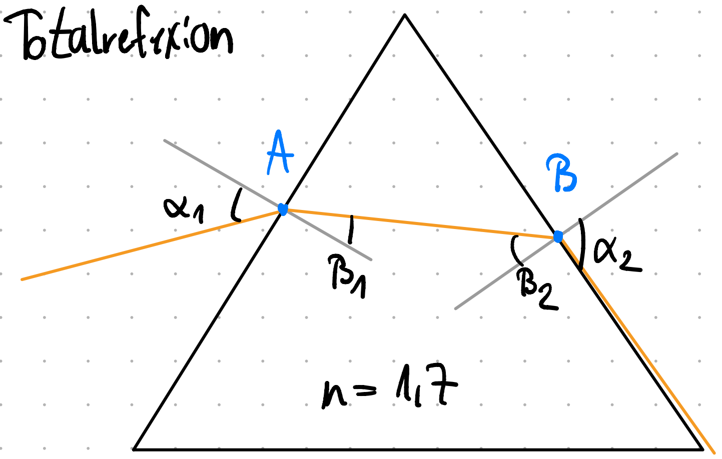
$$= 58{,}21°$$

Minimalablenkung: $\delta_{min} = 2 \cdot \alpha - \gamma$

$$= 2 \cdot 58{,}21° - 60°$$

$$= 56{,}42°$$

b) Totalreflexion



also $\alpha_2 = 90°$

Grenzfall in B: $\beta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}7}\right)$

$= \underline{36{,}03°}$

$\gamma = \beta_1 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 = \gamma - \beta_2$

$= 60° - 36{,}03°$

$= \underline{23{,}97°}$

In A:

Brechungsgesetz in Luft: $\sin(\alpha_1) = n \cdot \sin(\beta_1)$

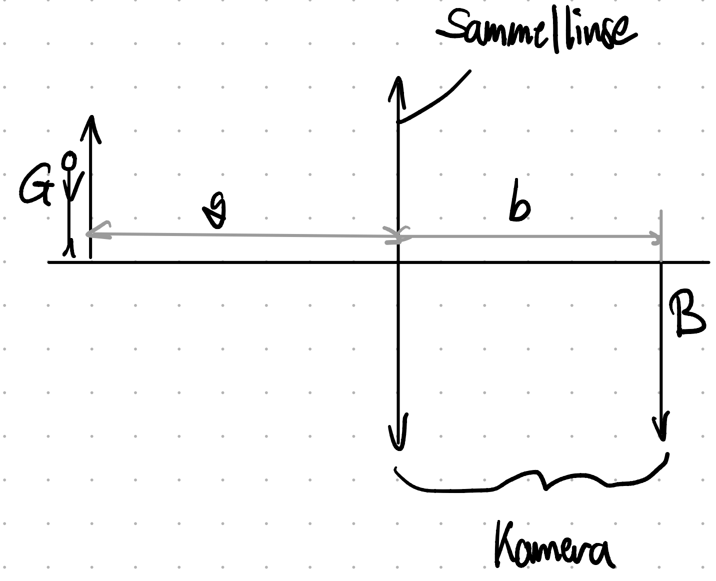
$\Leftrightarrow \alpha_1 = \sin^{-1}\left[n \cdot \sin(\beta_1)\right]$

$= \sin^{-1}\left[1{,}7 \cdot \sin(23{,}97°)\right]$

$= 43{,}68°$

Wenn $\alpha_1 = 43{,}68°$ noch kleiner wird tritt in B Totalreflexion auf.

13) Mit einer Kleinbildkamera der Brennweite 5 cm soll eine Person der Größe 1,80 m im Hochformat fotografiert werden. Bei Hoch-format beträgt die maximale Bildgröße B = 36 mm. Wie groß muss die Gegenstandsentfernung sein?



Gegenstandsgröße: G

Gegenstandsweite: g

Bildgröße: B

Bildweite: b

Brennweite: f

Gesucht: g

Formeln: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ ① und $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ ②

Aus: ② $\Leftrightarrow b = \frac{B}{G} \cdot g$

$\Leftrightarrow b = \frac{36 \cdot 10^{-3}\,m}{1{,}8\,m} \cdot g$

In ①: $\frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{1}{50} \cdot g} + \frac{1}{g}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{51}{g}$

$\Leftrightarrow 51 \cdot f = g$

$\Leftrightarrow g = 5cm \cdot 51$

$= 2{,}55m$

14) Mit der gleichen Kleinbildkamera wie in Aufgabe 13 soll der Mond (G = 3476 km, g = 384400 km) abgebildet werden. Berechne Sehwinkel und Bildgröße! Schlussfolgere!

Gegeben → Aufg. 13

Brennweite: $f = 5cm$

Bildgröße: $b = 36mm$

und

Gegenstandsweite: $g = 384'400km$

Gegenstandsgröße: $G = 3'476\,km$

Gesucht: B, w

Für kleine Winkel: $\frac{G}{g} = w$ $\qquad w = [rad]$

Also: $w = \frac{3'476\,\cancel{km}}{384'400\,\cancel{km}} = 9{,}04 \cdot 10^{-3}$ rad

$B = b \cdot w$

$= 36\,mm \cdot 9{,}04 \cdot 10^{-3}\ \cancel{rad}$

$= 0{,}325\,mm$

Der Mond wird sehr klein abgebildet.

15) In welcher Bildweite und Bildgröße wird eine 1,75 m große Person abgebildet, die 6,5 m von einer Linse mit der Brennweite 25 cm entfernt ist?

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{g}{fg} - \frac{f}{fg}$

$\Leftrightarrow b = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$= \frac{6{,}5\,m \cdot 0{,}25\,m}{6{,}5\,m - 0{,}25\,m}$

$= 1{,}08\,m$

Abbildungsmaßstab: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \Leftrightarrow B = \frac{b}{g} \cdot G$

$= \frac{1{,}08\,m}{6{,}5\,m} \cdot 1{,}75\,m$

$= 0{,}291\,m$

16) Berechnen Sie die Entfernung und Größe eines Gegenstandes, der von einer Linse mit 18 cm Brennweite in einer Bildweite 24 cm und einer Größe 10 cm abgebildet wird!

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}$

$\Leftrightarrow g = \frac{f \cdot b}{b - f}$

$$= \frac{24 \cdot 18}{24-18}\ \text{cm}$$

$$= 72\,\text{cm}$$

Abbildungsmaßstab: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \iff G = \frac{g}{b} \cdot B$

$$= 72\,\text{cm} \cdot \frac{10\cancel{\text{cm}}}{24\cancel{\text{cm}}}$$

$$= 30\,\text{cm}$$

17) Welche Brennweite muss eine Linse haben, damit sie von einem 3,12 m entfernten 1,2 m großen Gegenstand ein 10 cm großes Bild erzeugt?

Abbildungsmaßstab: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \iff b = \frac{B}{G} \cdot g$

$$= \frac{10\,\text{cm}}{1{,}2\cancel{\text{m}}} \cdot 3{,}12\cancel{\text{m}}$$

$$= 26\,\text{cm}$$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \iff \frac{1}{f} = \frac{1}{26\,\text{cm}} + \frac{1}{312\,\text{cm}}$

$$\iff f = 24\,\text{cm}$$

18) Ein Gegenstand soll von einer Linse mit 7,5 cm Brennweite die dreifache Größe erhalten. Berechnen Sie seine Gegenstands- und Bildweite!

Abbildungsmaßstab: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \Gamma = 3 \implies b = 3g$ $\circledast$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \iff \frac{1}{f} = \frac{1}{3g} + \frac{1}{g}$

$$\iff f = \frac{3}{4} g$$

$$\iff g = \frac{4}{3} \cdot f$$

$= \frac{4}{3} \cdot 7{,}5\,\text{cm}$

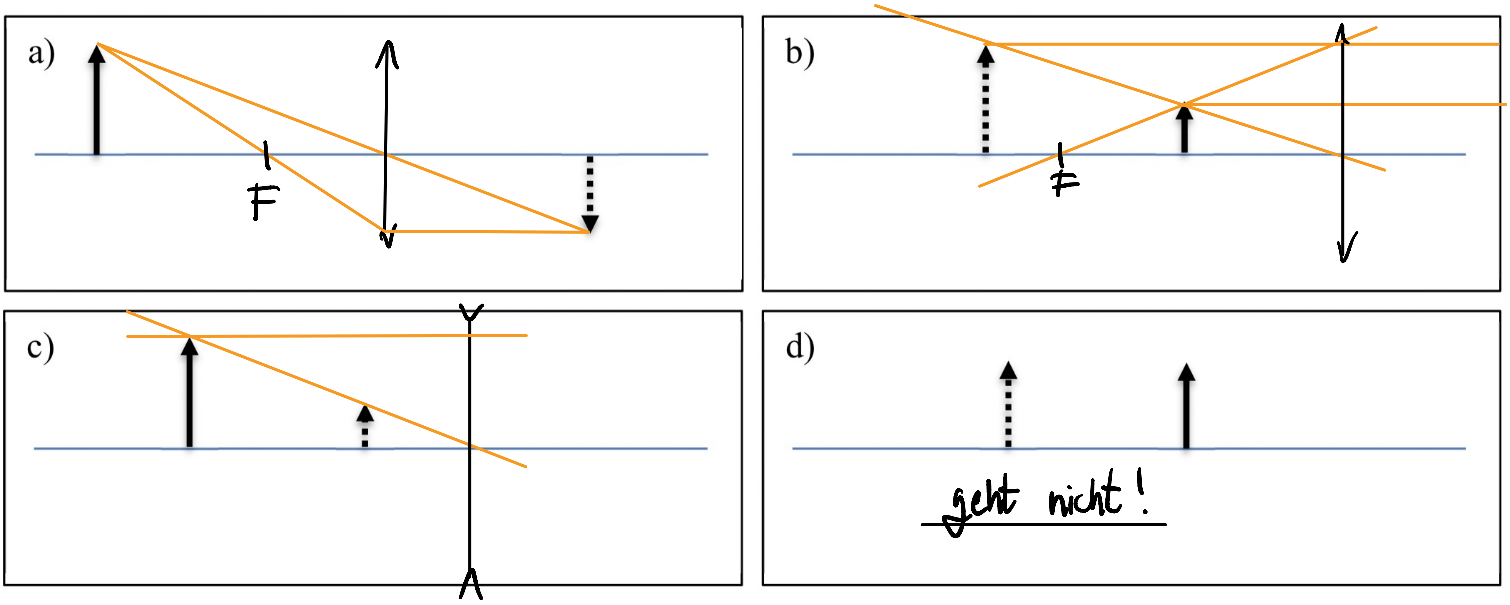
$= 10\,\text{cm}$

Aus: ⊛ $\Leftrightarrow b = 3 \cdot g$

$= 3 \cdot 10\,\text{cm}$

$= 30\,\text{cm}$

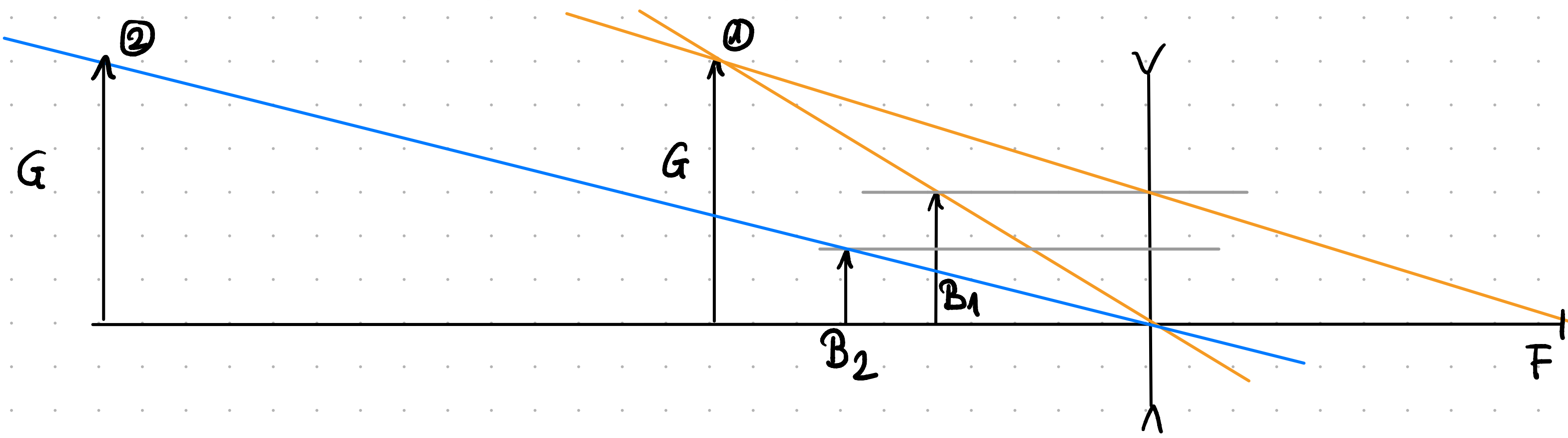
19) Folgender Gegenstand (fester Pfeil) ergibt folgendes Bild (gestrichelter Pfeil).
Überlege zuerst, ob die jeweilige Situation physikalisch möglich ist ~~und bestimme dann zeichnerisch die Lage und die Brennweite der Linse.~~



20) Ein Gegenstand von 3 cm befindet sich 4 cm vor einer Zerstreuungslinse. Rückt man ihn um weitere 6 cm von der Linse weg, so wird das Bild ~~doppelt so klein~~. halb so groß!

a) Wie groß ist die Brennweite der Linse? Bestimme auch Bildgrößen und Bildweiten!

b) Wohin muss man den Gegenstand stellen, damit sich zwischen ihm und seinem Bild 30 cm Abstand befinden?



<u>Abbildungsgleichung</u>: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$

①: $G = 3cm$	$B_1 = B = ?$	$f = ?$
$g_1 = 4cm$	$b_1 = ?$	

②: $G = 3cm$	$B_2 = \frac{1}{2}B_1 = \frac{B}{2}$	$f = ?$
$g_2 = 10cm$	$b_2 = ?$	

<u>Es gilt</u>: $f < 0$

$G < 0,\ g < 0$

$B < 0,\ b < 0$

<u>Alle Größen in cm!</u>

a) <u>Aus Situation ①</u>: $\frac{G}{g_1} = \frac{3}{4} = \frac{B}{b_1} \Leftrightarrow B = \frac{3}{4} \cdot b_1$

<u>Aus Situation ②</u>: $\frac{G}{g_2} = \frac{3}{10} = \frac{B}{2b_2} \Leftrightarrow B = \frac{6}{10} b_2 = \frac{3}{5} b_2$

<u>Es folgt</u>: $B = B \Leftrightarrow \frac{\cancel{3}}{4} b_1 = \frac{\cancel{3}}{5} b_2$

$\Leftrightarrow b_1 = \frac{4}{5} b_2$

<u>Aus Situation ①</u>: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{g_1} = \frac{1}{b_2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$ Ⓘ

<u>Aus Situation ②</u>: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b_2} + \frac{1}{10}$ Ⓘⓘ

Ⓘ − Ⓘⓘ $\Leftrightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{f} = \frac{1}{b_2}\frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{b_2} - \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b_2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b_2} = -\frac{3}{20} \cdot 4$

$\Leftrightarrow b_2 = -\frac{5}{3} = 1{,}667cm$

Bildweiten

<u>In Ⓘⓘ</u>: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b_2} + \frac{1}{10} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f = -2\ cm$

<u>In Ⓘ</u>: $\frac{1}{b_1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow b_1 = -\frac{4}{3} = 1{,}33cm$

Bildgrößen: $\circledast \Leftrightarrow B = \frac{3}{4} \cdot b_1 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \left(-\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right) = \underline{-1}$

$B = B_1 = -1cm$

$B = \frac{1}{2} B_2 = -0{,}5cm$

b) Gesucht: g sodass: $d = g + b = 30cm$ $\circledast$

Alle größen in cm!

$\Leftrightarrow b = 30 - g$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{g}{bg} + \frac{b}{bg}$

$\Leftrightarrow f = \frac{bg}{g+b}$

$\Leftrightarrow -2 = \frac{(30-b)\,b}{\cancel{b} + 30 - \cancel{b}}$

$\Leftrightarrow -60 = 30b - b^2$

$\Rightarrow b^2 - 30b - 60 = 0$

Formel: $\Delta = b'^2 - 4ac$

$= 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)$

$= 1140$

$\Leftrightarrow b = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 \pm \sqrt{1140}}{2 \cdot 1}$

Lösung muss negativ sein Zerstreuungslinse!

$\Rightarrow b = -1{,}88$ cm

$\circledast \Rightarrow g + b = 30$

$\Leftrightarrow g = 30 - b$

$\Leftrightarrow g = 30 + 1{,}88$

$= 31{,}88cm$

21) Wie groß muss die Gegenstandsweite g eines sich vor einer Sam-mellinse befindlichen Gegenstandes sein, damit die Distanz x zwischen ihm und seinem Bild minimal wird?

Im Fall eines reellen Bildes:

Es gilt: $D = g + b$ ①

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{g} - \frac{1}{f}$

$$\Leftrightarrow b = \frac{g \cdot f}{g - f}$$

In ①:

$$D = D(g)$$
$$= g + b$$
$$= g + \frac{gf}{g-f}$$
$$= \frac{g(g-f) + gf}{g-f}$$
$$= \frac{g^2 \cancel{-gf} \cancel{+gf}}{g-f}$$
$$= \frac{g^2}{g-f}$$

$D(g)$ ist minimal wenn: $D'(g) = 0$ und $f = \text{konstant}$.

$$D'(g) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x)v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} = 0$$

$$u(x) = g^2 \quad u'(x) = 2g$$
$$v(x) = g - f \quad v'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2g(g-f) - g^2}{(g-f)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2g^2 - 2gf - g^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow g^2 - 2gf = 0$$

$$\Leftrightarrow g(g-2f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g=0}_{\to \text{ zu verwerfen}} \quad \text{oder} \quad g = 2f \quad \text{und } b = 2f$$

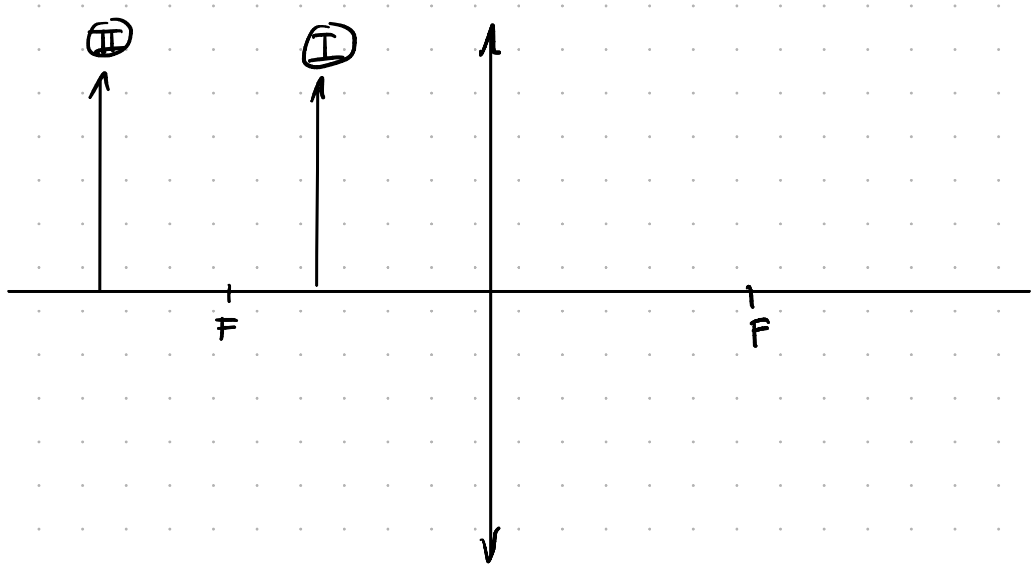
22) Ein Gegenstand von 2 cm Größe steht vor einer bikonvexen Linse und ergibt ein virtuelles Bild von 4 cm Größe.

a) Rückt man ihn um 2 cm weiter von der Linse weg, so entsteht ein reelles Bild der Größe 8 cm. Bestimme hieraus die Brenn-weite der Linse sowie die Bild- und Gegenstandsweiten!

b) In welche Richtung und wie weit muss man den Gegenstand verschieben, damit zwischen ihm und seinem virtuellen Bild eine Distanz von 10 cm ist?

bikonvexe Linse → Sammellinse

a) Skizze:



Es gilt:

Situation I: $G = 2\,\text{cm}$ $\quad g_1 = ?$ $\quad f = ?$

$B_1 = -4\,\text{cm}$ $\quad b_1 = ?$

Situation II: $g_2 = g_1 + 2cm$ ⑤ $b_2 = ?$ $f = ?$

$B_2 = 8cm$ $G = 2cm$

Ab jetzt alle größen in cm:

Abbildungsgleichung: $\frac{B_1}{G} = \frac{b_1}{g_1} = -\frac{4}{2} = -2 \Leftrightarrow b_1 = -2g_1$ ①

$\frac{B_2}{G} = \frac{b_2}{g_2} = \frac{8}{2} = 4 \Leftrightarrow b_2 = 4g_2$ ②

Abbildungsgleichung:

Aus Situation I: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{g_1}$ | mit ①

$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{-2g_1} + \frac{1}{g_1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{2g_1}$

$\Leftrightarrow f = 2g_1$ ③

und Situation II: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b_2} + \frac{1}{g_2}$ | mit ②

$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{4g_2} + \frac{1}{g_2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{5}{4g_2}$

$\Leftrightarrow f = \frac{4}{5}g_2$ ④

③ = ④ $\Leftrightarrow \frac{4}{5}g_2 = 2g_1$ | mit ⑤

$\Leftrightarrow \frac{4}{5}(g_1 + 2) = 2g_1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5}g_1 + \frac{8}{5} = 2g_1$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{5}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{5}}g_1$

$$\Rightarrow g_1 = \frac{4}{3} = 1{,}33\,\text{cm}$$

In ⑤: $g_2 = g_1 + 2\,\text{cm}$

$= 1{,}33\,\text{cm} + 2\,\text{cm}$

$= 3{,}33\,\text{cm}$

und in ①: $b_1 = -2 g_1$

$= -2 \cdot \frac{4}{3}$

$= -2{,}67\,\text{cm}$

und aus ②: $b_2 = 4 \cdot g_2$

$= 4 \cdot 3{,}33$

$= 13{,}33\,\text{cm}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{g_1}$$

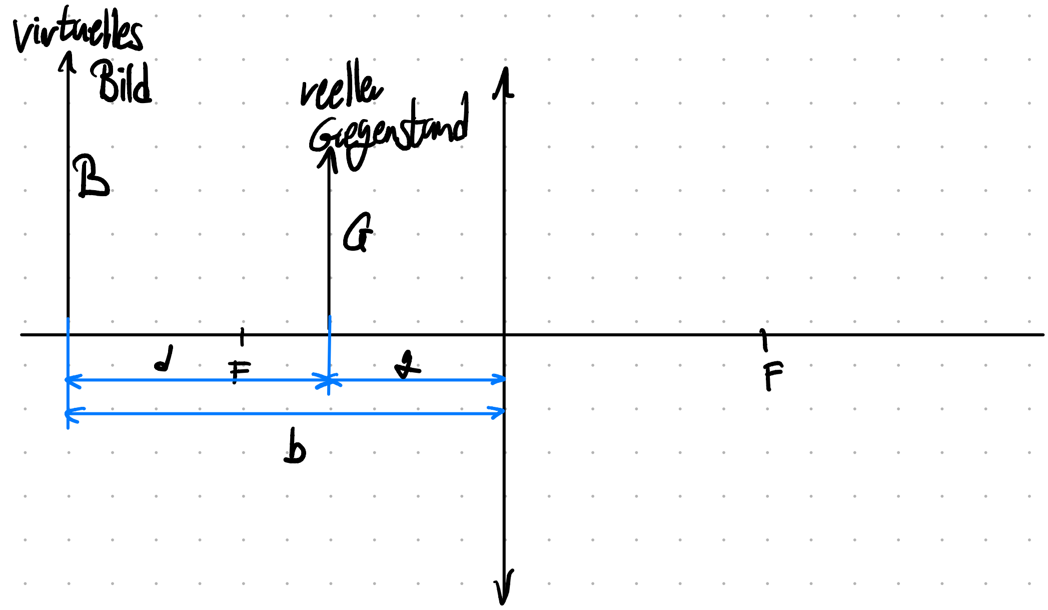
$$= -\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$= 0{,}375$$

$$\Rightarrow f = 2{,}67\,\text{cm}$$

b)



Es folgt: $b < 0$, da reelles Bild

$g > 0$

$d = 10cm$

Also : $d = |b| - |g| = -b - g$ ①

Ab jetzt alle Größen in cm:

$$\Leftrightarrow 10 = -b - g$$

$$\Leftrightarrow -b = 10 + g$$

$$\Leftrightarrow b = -10 - g$$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{10+g} + \frac{1}{g}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} - \frac{1}{10+g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{10+g}{g(10+g)} - \frac{g}{g(10+g)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{10}{g(10+g)}$$

$$\Leftrightarrow 10f = g(10+g)$$

$$\Leftrightarrow 10f = 10g + g^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 + 10g - 10f = 0$$

$$\Leftrightarrow g^2 + 10g - \frac{80}{3} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 10^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{80}{3}$$

$$= \frac{620}{3}$$

Daraus folgt, da $g > 0$: $g = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-10 + \sqrt{\frac{3200}{3}}}{2 \cdot 1}$$

$= 2{,}19\ \text{cm}$

Berechnung der Bildweite: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{g}{fg} - \frac{f}{fg}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{fg}{g-f}$$

$$= \frac{2{,}19 \cdot 2{,}67}{2{,}19 - 2{,}67}$$

$$= -12{,}18\ \text{cm}$$

23) Ein Filmvorführgerät soll die 18 mm hohen Filmbilder auf eine 2,5 m hohe Projektionswand abbilden, die 30 m entfernt ist.

a) Welche Brennweite muss das Objektiv haben?

b) Wie groß ist der Sehwinkel für einen Kinobesucher, der 10 m bzw. 20 m von der Leinwand entfernt sitzt?

Gegeben: $B = 18\text{mm}$ $g = 30\text{m}$ $f = ?$

$G = 2{,}5\text{m}$ $b = ?$

a) $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \Leftrightarrow b = \frac{B}{G} \cdot g$

$$= \frac{18\text{mm}}{2{,}5\text{m}} \cdot 30\text{m}$$

$$= 216\text{mm}$$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ Einheiten im Meter

$$= \frac{1}{0{,}216} + \frac{1}{30}$$

$$= 4{,}66$$

$$\Rightarrow f = 0{,}214\text{m}$$

b) Für 10m:

$$w = \tan^{-1}\left(\frac{G}{g}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2{,}5m}{10m}\right)$$

$$= 14{,}0°$$

Für 20m:

$$w = \tan^{-1}\left(\frac{G}{g}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2{,}5}{20m}\right)$$

$$= 7{,}13°$$

24) Das Objektiv eines Fotoapparates hat eine Brennweite $f = 5$ cm. Es soll von der Einstellung auf Unendlich ausgehend, eine Gegenstandsweite von 10 m bzw. 1 m bzw. 0,50 m eingestellt werden.

a) Um welche Strecke muss das Objektiv verschoben werden?

b) Wie groß ist in jedem Fall der Abbildungsmaßstab?

unendlich scharf: $b = f$!

a) Aus Angabe:

$g_{10} = 10m$, $b_{10} = ?$

$g_{20} = 20m$, $b_{20} = ?$

$g_{0,5} = 0{,}5m$, $b_{0,5} = ?$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{g-f}{fg}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{gf}{g-f}$$

Für 10m:

$$b_{10} = \frac{10m \cdot 0{,}05m}{10m - 0{,}05m}$$

$$= 0{,}0502\,m$$

Also: $b_{10} - f = 0{,}02cm$

Für 1m:

$$b_1 = \frac{1\,m \cdot 0{,}05\,m}{1\,m - 0{,}05\,m}$$

$$= 0{,}0526\,m$$

Also: $b_{20} - f = 0{,}26cm$

Für 0,5m:

$$b_{0,5} = \frac{0{,}5m \cdot 0{,}05m}{0{,}5m - 0{,}05m}$$

$$= 0{,}0555\,m$$

Also: $b_{0,5} - f = 0{,}55cm$

b) Formel: $\boxed{\Gamma = \frac{b}{g}}$

Spezial Fall

$\Gamma_{+\infty} = \frac{f}{+\infty} = 0$ $\quad \Gamma_{10} = \frac{0{,}0502}{10} = 5{,}02 \cdot 10^{-3}$ $\quad \Gamma_1 = \frac{0{,}0526}{1} = 5{,}26 \cdot 10^{-2}$ $\quad \Gamma_{0{,}5} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}111$

25) Das Objektiv eines Fotoapparates hat eine Brennweite $f = 5$ cm.

a) Wie groß ist auf dem Film das Bild des Mondes, wenn der Mond dem bloßen Auge unter einem Sehwinkel von 0,5° erscheint?

b) Welche Brennweite müsste man wählen, damit das Bild 5 mm groß wird?

c) Wie groß wäre das Bild, wenn man ein Teleobjektiv mit einer Brennweite $f = 15$ cm verwenden würde?

a) Sehwinkel: Kleinwinkelnäherung:

$$w = \frac{G}{g} \quad \text{und } 0{,}5° = 8{,}7266 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Das Bild des Mondes entsteht im Brennpunkt.

Es gilt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \underbrace{\frac{1}{g}}_{=0} \Leftrightarrow f = b$

und: $\frac{B}{b} = \frac{G}{g} = \frac{B}{f} = w \Leftrightarrow B = f \cdot w$

$$= 5\text{cm} \cdot 8{,}7266 \cdot 10^{-3} \cancel{\text{rad}}$$

$$= 0{,}044 \text{ cm}$$

b) $(*) \Leftrightarrow f = \frac{B}{w}$

$$= \frac{5\text{mm}}{8{,}7266 \cdot 10^{-3} \cancel{\text{rad}}}$$

$$= 572 \text{ mm}$$

c) $(*) \Leftrightarrow B = f \cdot w$

$$= 15\text{cm} \cdot 8{,}7266 \cdot 10^{-3} \cancel{\text{rad}}$$

$$= 0{,}13 \text{ cm}$$

26) Wir wollen eine Sammellinse der Brennweite 5 cm als Lupe zur Betrachtung eines 4,9 cm entfernten Objektes der Größe 1 mm benutzen.

a) Wo entsteht das Bild und wie groß ist es?

~~b) Bestimme Abbildungsmaßstab und Vergrößerung!~~

a) Gegeben: $f = 5\,cm$; $g = 4{,}9\,cm$; $G = 1\,mm$

Abbildungsgleichung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Rightarrow b = \frac{gf}{g-f}$

$$= \frac{4{,}9\,cm \cdot 5\,cm}{4{,}9\,cm - 5\,cm}$$

$$= -245\,cm$$

↳ virtuelles Bild, also vor dem Brennpunkt.

Es folgt: $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \Leftrightarrow B = \frac{b}{g} \cdot G$

$$= \frac{-245}{4{,}9} \cdot 1\,mm$$

$$= -50\,mm$$