1. Zur Überprüfung der Zeitdilatation können Myonen herangezogen werden. Solche Myonen entstehen in der Hochatmosphäre in einer Höhe von 10 km über der Erdoberfläche. Diese Elementarteilchen gleichen in vielen Eigenschaften den Elektronen, sind jedoch instabil und zerfallen sofort. Der Zerfall genügt einem Exponentialgesetz, wie dies auch für den radioaktiven Zerfall gilt. Die Halbwertszeit für Myonen beträgt 1,52 µs. Die Halbwertszeit ist die Zeit nach der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Teilchen zerfallen ist. Die Geschwindigkeit der Myonen ist $v = 0{,}999\,42\,c$. Zeigen Sie, dass solche Myonen die Erdoberfläche nur in Folge der Zeitdilatation erreichen können.

- Halbwertszeit der Myonen : $t_{\frac{1}{2}} = \Delta t_0 = 1{,}52\,\mu s = 1{,}52 \cdot 10^{-9}\,s$

Im Bezugssystem Erde haben Myonen eine Geschwindigkeit von $v = 0{,}99942c$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10 \cdot 10^3\,m}{0{,}99942 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$= 33{,}4\,\mu s \quad (\gg t_{\frac{1}{2}})$$

Durch Zeitdilatation ist der Zerfall der schnellen Myonen im Bezug zur ruhenden Erde verlangsamt.

Ihre Halbwertszeit beträgt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1{,}52 \cdot 10^{-6}\,s}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}99942c)^2}{c^2}}}$$

$$= 44{,}6\,\mu s$$

4. Ein Teilchenbeschleuniger bringt Elektronen auf eine kinetische Energie von 7500 MeV.

a) Wie groß ist die dynamische Masse der Elektronen?

($m = 1{,}34 \cdot 10^{-26}$ kg)

b) Wie schnell bewegen sich die Elektronen?

($v = 0{,}999\,999\,998\ c$)

$$E = E_{kin} = 7500\,\text{MeV} = 7500 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$$
$$= 1{,}202 \cdot 10^{-9}\,\text{J}$$

a) Es gilt:

$$E_{kin} = E - E_0 = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} + m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{E_{kin} + m_0 \cdot c^2}{c^2}$$

$$= \frac{1{,}202 \cdot 10^{-9}\,\text{J} + 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$= 1{,}33 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$$

b) Es gilt: $E = E_0 + E_{kin} \Leftrightarrow E_{kin} = E - E_0$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot c^2 (\gamma - 1)$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2}} \cdot c$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{1{,}202 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} + 1\right)^2}} \cdot 2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$= 0{,}999\,999\,997\,66\,c$$

5. Der nächste Fixstern ist Alpha-Centauri am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.
   a) Wie lange braucht ein utopisches Raumschiff, um zum Stern und wieder zur Erde zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}5\,c$ beträgt?

   ($t = 18$ a)

   b) Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord des Raumschiffs dauern?

   ($t' = 15{,}6$ a)

   c) Welche Geschwindigkeit müßte das Raumschiff haben, damit für die Besatzung während der Reise nur ein Jahr vergeht?

   ($v = 0{,}9938\,c$)

a) Zurückgelegte Strecke: $s = 2 \cdot 4{,}5\,lj \ \underline{= 9\,lj}$

benötigte Zeit: $\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{9\,Lj}{0{,}5 \cdot c} = 18a$

b) Zeitdilatation:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 18a \sqrt{1-\frac{(0{,}5c)^2}{c^2}}$$

$$= 12{,}5\,a$$

c) Es gilt:

$$\Delta t = \Delta t \Leftrightarrow \frac{s}{v} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2}{v^2} = \frac{\Delta t_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow s^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t_0^2 \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow s^2 - v^2\frac{s^2}{c^2} = \Delta t_0^2 \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow v^2\left(\frac{s^2}{c^2} + \Delta t_0^2\right) = s^2$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{s}{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \Delta t_0^2}}$$

mit Zeit Δt_0 in Jahren und der Strecke s in Lichtjahren.

$$v = \frac{9\,Lj}{\sqrt{\frac{(9\,Lj)^2}{(1c)^2} + (1a)^2}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{Lj}{\frac{\cancel{Lj}}{\cancel{c}\,a} + a} = c$$

$$= 0{,}993884\,c$$

6. Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt $4 \cdot 10^{23}$ kW.
Um wie viel verringert sich dadurch die Masse der Sonne pro Sekunde?

($m = 4{,}4 \cdot 10^9$ kg)

Formeln: $P = \frac{E}{t} \left(= \frac{W}{t} \right) \Leftrightarrow E = P \cdot t$ und

$E = \Delta m \cdot c^2$

Es folgt:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{P \cdot t}{c^2}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{23} \cdot 10^3 \cdot \frac{J}{s} \cdot 1s}{2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$= 4{,}4 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

$$= 4{,}4 \cdot \text{Tg}$$

7. Die Masse eines Heliumkerns ist etwa 0,6 % geringer als die Masse von 4 Wasserstoffkernen.
   a) Wie viel Energie wird bei der Verschmelzung von 1 kg Wasserstoff zu Helium frei?

   ($E = 5{,}39 \cdot 10^{14}$ J)

   b) Wie viel Wasserstoff muss im Sonneninneren pro Sekunde verarbeitet werden, um die Sonnenstrahlung aufrecht zu erhalten?

   ($m = 7{,}42 \cdot 10^{11}$ kg)

Reaktion: $4 \cdot H^{\oplus} \longrightarrow He^{2+}$ oder $4 \cdot p^+ \longrightarrow \alpha$

a) Massen: $4 \cdot m_0(p^+) \longrightarrow \cdot m_0(\alpha) + \underbrace{\Delta m_0} \rightarrow$ Energie

100% 99,4% 0,6%

Energie eines Protons: $m_0(p^+) = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg

$\Delta m_0 = 0{,}006 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\text{kg} = \underline{1{,}0038 \cdot 10^{-29}}$

$$E_f = m_0 \cdot c^2 = 1{,}0038 \cdot 10^{-29}\,kg \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$= \underline{9{,}022 \cdot 10^{-13}\,J}$$

↳ freigesetzte Energie pro Proton!

Anzahl an Protonen:

$$N = \frac{1\,kg}{m_0(p^+)} = \frac{1\,kg}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{5{,}977 \cdot 10^{26}\ H\text{-Kerne}}$$

Gesamt freigesetzte Energie:

$$\Delta E_{ges} = N \cdot E_f$$

$$= 5{,}977 \cdot 10^{28} \cdot 9{,}022 \cdot 10^{-13}\,J$$

$$= 5{,}392 \cdot 10^{16}\,J$$

b) Die Sonnenstrahlung pro Sekunde beträgt: $E_{Sonne} = 4 \cdot 10^{26}\,J$

Aus a) Für 1kg H:

$$E_H = 5{,}392 \cdot 10^{16}\,J \left(\frac{J}{kg}\right)$$

Also:

$$m_{strahl} = \frac{E_{Sonne}}{\frac{E_H}{1kg}} = \frac{4 \cdot 10^{26}\,J}{\frac{5{,}392 \cdot 10^{16}\,J}{1\,kg}} = 7{,}42 \cdot 10^9\,kg$$

8. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn sein Impuls $p = 4\ \text{MeV}/c$ beträgt?

($v = 0{,}991\,92\ c$)

Formel:

$$p = m \cdot v \Leftrightarrow p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$$

dynamische Masse

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot p = m_0 \cdot v$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot p^2 = m_0^2 \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 - v^2\frac{p^2}{c^2} = m_0^2 \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow v^2\left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) = p^2$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}}$$

Umrechnen:

$$1\,\frac{MeV}{c} = 1\cdot 10^6 \cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\frac{J}{c}$$

$$= \frac{\frac{4\cdot 10^6\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J}{2{,}998\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}}{\sqrt{(9{,}108\cdot 10^{-31}\,kg)^2 + \frac{\left(\frac{4\cdot 10^6\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J}{2{,}998\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}\right)^2}{(2{,}998\cdot 10^8\,\frac{m}{s})^2}}}$$

$$= 0{,}991'9\,c$$

9. Ein Heliumatomkern besitzt die kinetische Energie 5 GeV. Wie groß sind seine dynamische Masse und seine Geschwindigkeit?
($m = 1{,}56\cdot 10^{-26}$ kg, $v = 0{,}904\ c$)

• dynamische Masse:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_0 \Leftrightarrow mc^2 = 5\,GeV + m_0\cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5\,GeV + m_0\cdot c^2}{c^2}$$

$$= \frac{5\cdot 10^9\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J + 6{,}6559\cdot 10^{-27}\,kg\cdot(2{,}998\cdot 10^8\,\frac{m}{s})^2}{(2{,}998\cdot 10^8\,\frac{m}{s})^2}$$

$$= 1{,}557\cdot 10^{-26}\,kg$$

$$= 0{,}000'0155'7\,yg$$

• Geschwindigkeit:

$$E = E_0 + E_{kin} \Leftrightarrow E_{kin} = E - E_0$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot c^2 (\gamma - 1)$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1 \right)^2}} \cdot c$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{5 \cdot 10^9 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{6{,}6559 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} + 1}} \; c$$

$$\boxed{= 0{,}9038\ c}$$

10. Ein Proton besitzt eine Gesamtenergie von 1500 MeV.

a) Wie groß sind seine dynamische Masse und seine Geschwindigkeit?

($m = 2{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $v = 0{,}78\,c$)

b) Welcher Prozentsatz der Gesamtenergie des Protons entfällt auf die Ruheenergie beziehungsweise auf die kinetische Energie?

(E_{kin}: 37,5 %, E_0: 62,5 %)

a)

• dynamische Masse:

$$E = m \cdot c^2 \Leftrightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{2{,}403 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}}{(2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{m}{s})^2}$$

$$E = 1500\,\mathrm{MeV} = 1500 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}403 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

$$= 2{,}674 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

• Geschwindigkeit:

$$m = \gamma \cdot m_0 \Leftrightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow m_0^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) m^2$$

$$\Leftrightarrow m_0^2 = m^2 - v^2 \cdot \frac{m^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow v^2 \cdot \frac{m^2}{c^2} + m_0^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{(m^2 - m_0^2)\,c^2}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{m^2 \cdot c^2 - m_0^2 \cdot c^2}{m^2}$$

$$= c^2 - \frac{m_0^2}{m^2} \cdot c^2$$

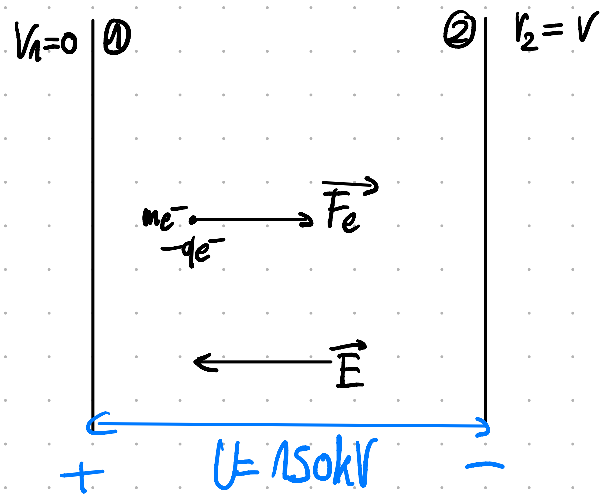
$$= c^2\left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} \cdot c$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}673 \cdot 10^{27}\,kg}{2{,}674 \cdot 10^{-27}\,kg}\right)^2} \cdot c$$

$$= 0{,}779c$$

11. Ein Elektron durchläuft eine Beschleunigungsspannung von 150 kV.
    a) Berechne seine Geschwindigkeit mit klassischen Gesetzen ($v = 2{,}30 \cdot 10^8$ m/s)
    b) Berechne seine Geschwindigkeit relativistisch. ($v = 1{,}90 \cdot 10^8$ m/s)
    c) Berechne seine Gesamtenergie. ($E = 1{,}06 \cdot 10^{-13}$ J = 661 keV)



a) $\Delta E_{kin} = E_2 - E_1 = E_2 = \frac{1}{2} m v^2$ und

$\Delta E_{kin} = W(\vec{F_e}) = q_e \cdot V$

Also: $\Delta E_{kin} = \Delta E_{kin} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q_e \cdot U$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q_e \cdot U}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 150 \cdot 10^3\,V}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,kg}}$$

$$= 2{,}2298 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

b) relativistische kinetische Energie:

Formel: $E_{kin} = m_0 \cdot c^2 (\gamma - 1)$

$$\Leftrightarrow q_e \cdot U = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow q_e \cdot U = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow q_e \cdot U + m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{q_e \cdot U + m_0 \cdot c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q_e \cdot U + m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q_e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{\frac{q_e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{1}{\frac{q_e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{q_e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1} \right)^2} \cdot c$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,Kg \cdot 150 \cdot 10^3\,V}{9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2} + 1} \right)^2} \; c$$

$= 0{,}6337\,c$ oder: $v = 1{,}8998 \cdot 10^8$

c) Es gilt:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_0$$

$$= m_0 \cdot c^2 (\gamma - 1) + m_0 \cdot c^2$$

$$= m_0 \cdot c^2 \gamma \cancel{- m_0 \cdot c^2} \cancel{+ m_0 \cdot c^2}$$

$$= \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31} kg \cdot (2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2}{\sqrt{1 - \frac{(1{,}8998 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2}{(2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2}}}$$

$$= 1{,}062 \cdot 10^{-13} \ J$$ oder : $\underline{V = 662 \ keV}$