3. Die Zerfallskonstante von ~~Radium~~ beträgt $\lambda = 1{,}43 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$. Innerhalb welcher Zeit zerfällt die Hälfte der Radiumkerne? ^{226}Ra

($T_{1/2}$ = 1536 a)

<u>Gesucht</u>: Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{1{,}43 \cdot 10^{-11}\,\frac{1}{s}} = 4{,}847 \cdot 183 \cdot 10^{10}\,s \quad \text{also, } T_{\frac{1}{2}} = 1536\,a$$

4. Die Halbwertszeit von ^{238}U beträgt $4{,}5 \cdot 10^{9}$ Jahre. Wie viele Kerne zerfallen pro Sekunde in einem Kilogramm?

($A = 1{,}235 \cdot 10^{7}$ Bq)

<u>Nuklid</u>: ^{238}U

<u>Gesucht</u>: Aktivität A

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln(2)}{4{,}5 \cdot 10^{9}\,\cancel{a} \cdot (60^2 \cdot 24 \cdot 365{,}25)\frac{s}{\cancel{a}}}$$

$$= \underline{4{,}881 \cdot 10^{-18}\,\frac{1}{s}}$$

<u>Masse</u>: $m_A = A_r \cdot u$

$$= 238 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,kg$$

$$= \underline{3{,}951 \cdot 10^{-25}\,kg}$$

<u>Also</u>: $N = \frac{m}{m_A}$

$$= \frac{1\,\cancel{kg}}{3{,}951 \cdot 10^{-25}\,\cancel{kg}}$$

$$= \underline{2{,}530 \cdot 10^{24}} \quad \text{(Atome)}$$

<u>Aktivität</u>:

$$A = \lambda \cdot N$$

$$= 4{,}881 \cdot 10^{-18}\,\frac{1}{s} \cdot 2{,}530 \cdot 10^{24}$$

$$= 1{,}235 \cdot 10^{7}\,Bq$$

5. Cs-131 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 9,7 Tagen. Wie viel Prozent des Anfangsmaterials sind vorhanden:
a) nach 30 Tagen,
b) nach einem Jahr?

($N(t)$ / $N(0)$ = 11,7 %; $N(t)$ / $N(0)$ = $4{,}62 \cdot 10^{-10}$ %)

<u>Nuklid</u>: ^{131}Cs

<u>Halbwertszeit</u>: $T_{\frac{1}{2}} = 9{,}7\,d$

a) <u>Gesucht</u>: $\frac{N(t)}{N_0}$

<u>Zerfallgesetz</u>: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ ①

wobei: $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln(2)}{9{,}7\,d}$ ②

② in ① $\Leftrightarrow$ $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{9{,}7d} \cdot t}$ ⊛

$$\Leftrightarrow \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\frac{\ln(2)}{9{,}7\cancel{d}} \cdot 30\cancel{d}}$$
$$= 0{,}117$$
$$= 11{,}7\,\%$$

Auch möglich: $N(t) = 11{,}7\% \cdot N_0$

Ursprünglich vorhandene Kerne

b) $t = 1a = 365{,}25d$

$$⊛ \Leftrightarrow \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\frac{\ln(2)}{9{,}7\cancel{d}} \cdot 365{,}25\cancel{d}}$$
$$= 4{,}622 \cdot 10^{-12}$$
$$= 4{,}622 \cdot 10^{-10}\,\%$$

6. Für Radium-226 ist die Zerfallskonstante $\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$.
   a) Wie viel Gramm Radium sind von einem Gramm Anfangsmasse nach 50 Jahren noch aktiv?
   b) Welche Aktivität besitzt 1 Gramm Radium-226?
   c) In welcher Zeit hat die Aktivität des Radiums um 90% abgenommen?
   Wie viele Atomkerne sind in dieser Zeit zerfallen?

($m(t) = 0{,}978$ g; $A = 3{,}676 \cdot 10^{10}$ Bq; $t = 5287{,}3$ a; $\Delta N = 2{,}4 \cdot 10^{21}$)

Nuklid: ^{226}Ra $\quad t = 50a$

$\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s}$ $\quad A_r = 226$

a) Gesucht: Aktivität A

Es gilt: Zerfallsgesetz

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$
$$= 1g \cdot e^{-1{,}38 \cdot 10^{-11} \cdot (365{,}25 \cdot 24 \cdot 60^2)\frac{s}{\cancel{a}} \cdot 50\cancel{a}}$$
$$= 0{,}978\,g$$

b) Formeln: $A = \lambda \cdot N$; $N = \frac{m}{m_A}$; $m_A = A_r \cdot u$

also: $A = \lambda \cdot \frac{m}{A_r \cdot u}$

$$= 1{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} kg}{226 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27} kg}$$

$$= 1{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21}$$

N_0

$$= 3{,}676 \cdot 10^{10}\,Bq$$

$= 36{,}8\,GBq = 36{,}8\,Ci$ (Curie)

c) Es bleiben also 10% übrig

Es gilt: $\frac{A(t)}{A_0} = 0{,}1$

also: $e^{-\lambda \cdot t} = 0{,}1$

$$\Leftrightarrow -\lambda \cdot t = \ln(0{,}1)$$
$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0{,}1)}{\lambda}$$
$$= \frac{\ln(0{,}1)}{1{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s}}$$
$$= 5287{,}3a$$

Es gilt: $\Delta N = N_0 - N(t)$

$$= N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$= N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$= N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= 2{,}665 \cdot 10^{21} \cdot \left(1 - e^{-1{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s} \cdot 5287{,}3\cancel{a} \cdot (60^2 \cdot 24 \cdot 365{,}25) \frac{s}{\cancel{a}}}\right)$$

$$= 2{,}4 \cdot 10^{21}$$

oder: $\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - 0{,}1 N_0$

$$= N_0 (1 - 0{,}1)$$

$$= 2{,}665 \cdot 10^{21} \cdot 0{,}9$$

$$= 2{,}4 \cdot 10^{21}$$

7. Die Halbwertszeit von Jod-131 beträgt 8,02 d. Wie viel Gramm dieses Isotops weisen eine Aktivität von 10^8 Bq auf?

($m = 2{,}18 \cdot 10^{-8}$ g)

Gegeben: ${}^{131}I \rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 8{,}02 d$

$\rightarrow A = 10^8$ Bq

Aktivität: $A = \lambda \cdot N$

$$= \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot N$$

$$= \frac{\ln(2) \cdot m}{T_{\frac{1}{2}} \cdot m_A}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{m_A \cdot T_{\frac{1}{2}} \cdot A}{\ln(2)}$$

$$= \frac{A_r \cdot 1u \cdot T_{\frac{1}{2}} \cdot A}{\ln(2)}$$

$$= \frac{131 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27} kg \cdot 8{,}02 \cdot 24 \cdot 3600 \cancel{s} \cdot 10^8 \cancel{Bq}}{\ln(2)}$$

$$= 2{,}174 \cdot 10^{-11} kg$$

$$= 2{,}174 \cdot 10^{-8} g$$

8. Berechnen Sie die Zeit, nach der die Aktivität eines Präparats um 95% abgenommen hat, wenn seine Halbwertszeit 140 d beträgt?

($t = 605{,}2$ d)

Es bleiben 5% übrig, also:

$$\frac{A(t)}{A_0} = 0{,}05 \iff e^{-\lambda t} = 0{,}05$$

$$\iff e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{\frac{1}{2}}}} = 0{,}05$$

$$\iff -\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{\frac{1}{2}}} = \ln(0{,}05)$$

$$\iff t = -\ln(0{,}05)\cdot\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln(2)}$$

$$= -\ln(0{,}05)\cdot\frac{140\,d}{\ln(2)}$$

$$= 605\,d$$

9. Heute besteht das in der Natur vorkommendes Uran aus 99,29 % ^{238}U und 0,71 % ^{235}U. Schätze das Alter der Erde ab, wenn man annimmt, dass bei der Entstehung der Erde die zwei Isotopen in gleicher Menge vorhanden waren. Die Halbwertszeiten sind jeweils: $T_{1/2}(^{238}U) = 4{,}5\cdot 10^9$ a; $T_{1/2}(^{235}U) = 7{,}1\cdot 10^8$ a.

($t = 6{,}01\cdot 10^9$ a)

$^{238}U \rightarrow T_{\frac{1}{2}}(^{238}U) = 4{,}5\cdot 10^9\,a \rightarrow 99{,}29\%$

$^{235}U \rightarrow T_{\frac{1}{2}}(^{235}U) = 7{,}1\cdot 10^8\,a \rightarrow 0{,}71\%$

Anzahl an Atomen am Anfang

Bei Entsehung der Erde: $t_0 = 0$, also $N_0(^{238}U) = N_0(^{235}U)$

Bei Messung: t

Verhältnis der Häufigkeit: $\frac{m(^{238}U)}{m(^{235}U)} = \frac{99{,}29\%}{0{,}71\%} = 139{,}8$

Also: $m(^{238}U) = 140\cdot m(^{235}U)$

Zerfallsgesetz:

$$\iff m_0(^{238}U)\cdot e^{-\lambda' t} = 140\cdot m_0(^{235}U)\cdot e^{-\lambda t}$$

$$\iff e^{-\lambda' t + \lambda t} = 140\,\underbrace{\frac{m_0(^{235}U)}{m_0(^{238}U)}}_{=1\text{, da am Anfang } m_0(^{235}U) = m_0(^{238}U)}$$

$$\Rightarrow t(\lambda - \lambda') = \ln(140)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(140)}{\ln(2)\left(\frac{1}{T_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{T'_{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$= \frac{\ln(140)}{\ln(2)\left(\frac{1}{7{,}1 \cdot 10^{8}\,a} - \frac{1}{4{,}5 \cdot 10^{9}\,a}\right)}$$

$$= 6{,}01 \cdot 10^{9}\ a$$

10. Eine Holzprobe einer antiken Kommode unbekannten Alters ist in Kohlenstoff überführt worden. Es zeigt sich, dass 1 g dieses Kohlenstoffs eine Aktivität von 14,5 Bq aufzeigt. 1 g Kohlenstoff der natürlichen Isotopenzusammensetzung aus dem zum jetzigen Zeitpunkt geschlagenen Holz, hat dagegen eine Aktivität von 16,2 Bq. Die Halbwertszeit des ^{14}C-Isotops beträgt $T_{1/2}$ = 5730 a. Bestimmen Sie das Alter dieser Holzkommode!

(t = 916 a)

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t} = \frac{14{,}5\ Bq}{16{,}2\ Bq}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0{,}895$$

$$\Leftrightarrow -\lambda t = \ln(0{,}895)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0{,}895)}{\ln(2)\ \frac{1}{T_{\frac{1}{2}}}}$$

$$= -\frac{\ln(0{,}895)}{\ln(2) \cdot \frac{1}{5730\,a}}$$

$$= 916{,}5\ a$$