Exercice 165

Prouver, dans chaque cas, que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1 $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + 1\,;\quad F(x) = (x-1)\ln(x)\,;\quad I =]0; +\infty[$.

2 $f(x) = x^4 \ln(x)\,;\quad F(x) = \frac{x^5}{25}(5\ln(x) - 1)\,;\quad I =]0; +\infty[$.

3 $f(x) = \cos(x) - \cos^3(x)\,;\quad F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x)\,;\quad I = [0; 2\pi]$.

$\boxed{1}$ $\forall x \in I :\ F(x) = \left[(x-1)\ln(x)\right]'$

$$= 1 \cdot \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{x} + 1 \qquad (= f(x))$$

$\boxed{2}$ $\forall x \in I :\ F(x) = \left[\frac{x^5}{25}(\ln(x) - 1)\right]'$

$$= \frac{x^4}{5} \cdot 5\ln(x) - \frac{x^4}{5} + \frac{x^4}{5}$$

$$= x^4 \ln(x) \qquad (= f(x))$$

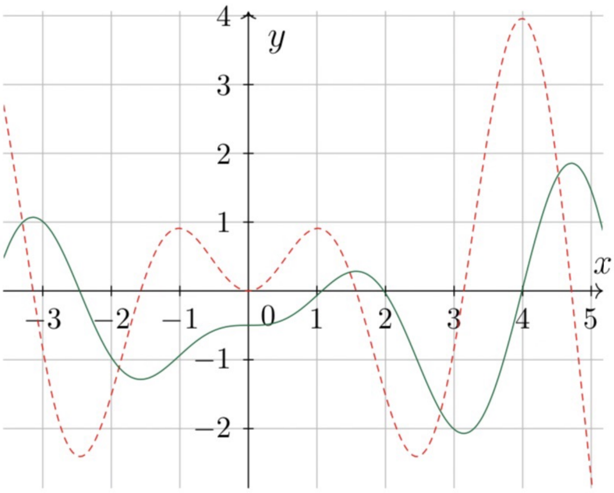
$\boxed{3}$ $\forall x \in I :\ F(x) = \left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]'$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

$$= (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x)$$

$$= \cos(x) - \cos^3(x) \qquad (= f(x))$$

Exercice 166

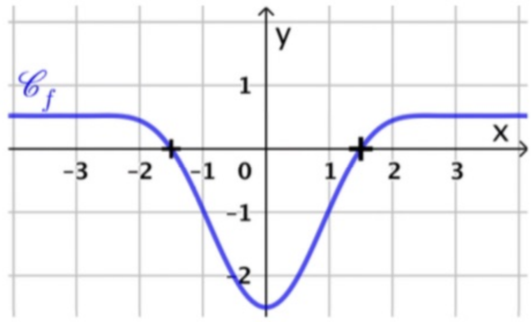


Les courbes représentées ci-contre sont associées à une fonction f et à une de ces primitives F sur $\mathbb{R}$.
Attribuer à chaque courbe la fonction qui convient.

La courbe verte est décroissante dès que la courbe rouge est en-dessous de l'axe des abscisses.
Elle est croissante dans les autres cas.
Il suit que f est représentée par la courbe rouge, et F est représentée par la courbe verte.

Exercice 167

F est une primitive de la fonction f représentée ci-dessous.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier !

1 F a exactement deux extrémums locaux.

2 F est strictement décroissante sur $]-1,5;1,5[$.

Si F est une primitive de f, alors $F' = f$

T.d.V.

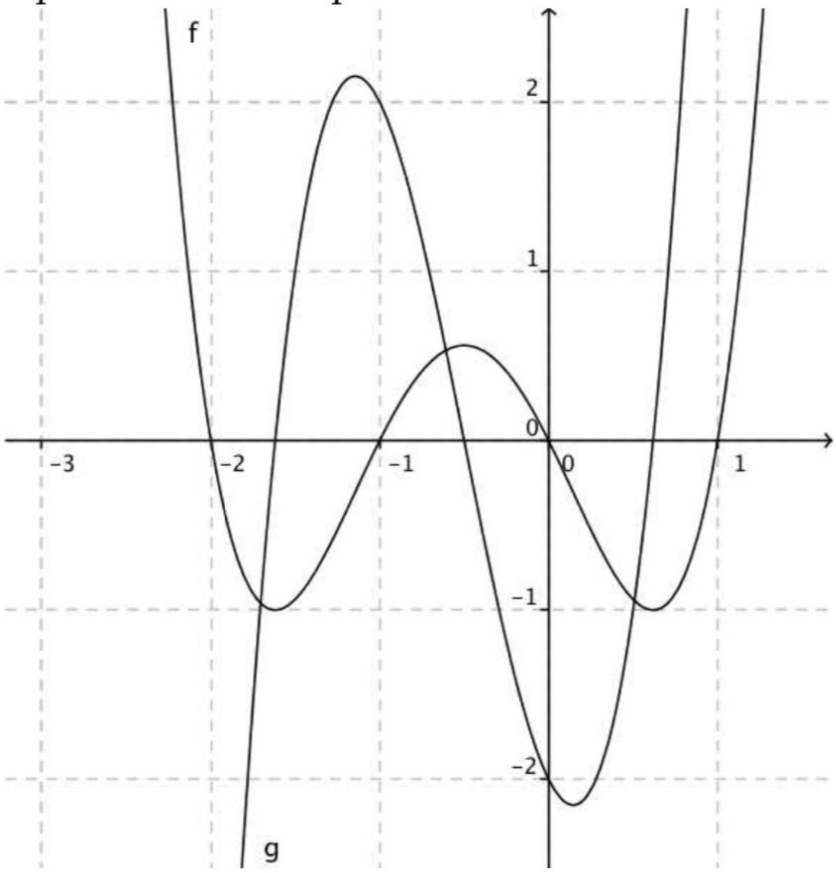
x	$-\infty$		$-1,5$		$1,5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		↗		↘		↗	

$\boxed{1}$ Vrai, d'après le T.d.V, f a un extrémum local en $-1,5$ et en $1,5$.

$\boxed{2}$ Vrai, car $f(x) < 0$ $\forall x \in]-1,5;1,5[$, donc F est strictement décroissante sur $]-1,5\,;\,1,5[$.

Exercice 168

Les courbes ci-dessous représentent une fonction et une des ses primitives. Laquelle est la fonction et laquelle est cette primitive ?



$\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en 3 endroits, c'est à dire g admet 3 racines sur $\mathbb{R}$.

$\mathscr{C}_f$ a 3 changements de variations aux mêmes endroits, c'est à dire f admet 3 extrema locaux.
Il suit que g est la dérivée de f, et f est une primitive de g.

Exercice 169

Vérifier, dans chaque cas, si les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1 $F(x) = \frac{3}{2x-1}$; $G(x) = \frac{9-6x}{4x-2}$; $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

2 $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$; $I = \mathbb{R}$.

3 $F(x) = e^{\frac{1}{2}x+\ln 2}$; $G(x) = 2\sqrt{e^x}$; $I = \mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ $\forall x \in I : F'(x) = \left(\dfrac{3}{2x-1}\right)'$

$$= -\frac{6}{(2x-1)^2}$$

$\forall x \in I : G'(x) = \left(\dfrac{9-6x}{4x-2}\right)'$

$u(x) = -6x+9$
$u'(x) = -6$
$v(x) = 4x-2$
$v'(x) = 4$

$$= \frac{-6(4x-2)+4(-6x+9)}{(4x-2)^2}$$

$$= -\frac{6}{(2x-1)^2}$$

Donc F et G sont des primitives de la même fonction f.

$\boxed{2}$ $\forall x \in I : F'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'$

$$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$\forall x \in I : G'(x) = \dfrac{6x(1+x^2) - 2x(5+3x^2)}{2(1+x^2)^2}$

$$= \frac{6x+\cancel{6x^3}-10x-\cancel{6x^3}}{2(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-4x}{2(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Donc F et G sont des primitives de la même fonction f.

$\boxed{3}$ $\forall x \in I : F'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x + \ln(2)}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{\ln(2)}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x}$$

$$= \sqrt{e^x}$$

$\forall x \in I : G'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}$$

$$= \sqrt{e^x}$$

Donc F et G sont des primitives de la même fonction f.

Exercice 170

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 La fonction $F : x \mapsto \ln x - 1$ est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en e.

2 La fonction $F : x \mapsto e^{x \ln 2}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{x \ln 2}$ dont la courbe passe par le point de coordonnées $(1; 2)$.

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* :\quad F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

$$F(e) = \ln(e-1)$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

↳ Vrai

$\boxed{2}$ $F(1) = e^{1 \cdot \ln(2)} = 2$

$\forall x \in \mathbb{R} :\quad F'(x) = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) \; (\neq f(x)) \longrightarrow$ Faux

Exercice 171

Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

1 $f(x) = (3x+2)^3; \quad I = \mathbb{R}.$

2 $f(x) = 2(3x-1)^5; \quad I = \mathbb{R}.$

3 $f(x) = \sin(2x - \pi); \quad I = [0; \pi].$

4 $f(x) = 4\cos(2x+1); \quad I = [0; \pi].$

5 $f(x) = e^{-x+1}; \quad I = \mathbb{R}.$

6 $f(x) = 2e^{3x-2}; \quad I = \mathbb{R}.$

7 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x+1}}; \quad I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$

8 $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}; \quad I = \mathbb{R}.$

9 $f(x) = \frac{2}{x-4}; \quad I =]4; +\infty[.$

10 $f(x) = \frac{8}{(x-4)^3}; \quad I =]4; +\infty[.$

11 $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x; \quad I = \mathbb{R}.$

12 $f(x) = \cos x \cdot (\sin^2 x + 1); \quad I = \mathbb{R}.$

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3(3x+2)^3$

d'où $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}(3x+2)^4 + c$

$$= \frac{1}{12}(3x+2)^4 + c,\; c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = 2(3x-1)^5$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3(3x-1)^5$$

d'où $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(3x-1)^6 + c$

$$= \frac{1}{9}(3x-1)^6 + c,\; c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{3}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \sin(2x-\pi)$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sin(2x-\pi)$$

d'où $F(x) = -\frac{1}{2}\cdot \cos(2x-\pi) + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $\forall x \in I,\ f(x) = 4\cos(2x+1)$

$$= 2\cdot 2\cdot \cos(2x+1)$$

d'où $F(x) = 2\sin(2x+1) + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{5}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x+1}$

$$= -(-e^{-x+1})$$

d'où $F(x) = -e^{-x+1} + c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{6}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2e^{3x-2}$

$$= 2\cdot 3\cdot \frac{1}{3} e^{3x-2}$$

d'où $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-2} + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{7}$ $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[,\ f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x+1}}$

$$= \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2x+1}}$$

d'où $F(x) = 2\cdot 2\sqrt{2x+1} + c$

$$= 4\sqrt{2x+1} + c,\ c\in\mathbb{R}$$

$\boxed{8}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \frac{2}{x-4}$

d'où $F(x) = 2\ln(|x-4|) + c$

$$= 2\ln(x-4) + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

$\boxed{10}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{8}{(x-4)^3}$

d'où $F(x) = -\dfrac{1}{\cancel{2}_{1}} \dfrac{\cancel{8}^{4}}{(x-4)^2} + c = -\dfrac{4}{(x-4)^2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{11}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(x)$

$= \sin(x) \cdot \left[1 - \sin^2(x)\right]$

d'où $F(x) = -\dfrac{\cos^3(x)}{3} + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{12}$ $\forall x \in I,\ f(x) = \cos(x)\left[\sin^2(x) + 1\right]$

$= \cos(x) \cdot \sin^2(x) + \cos(x)$

d'où $F(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{3} + \sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Exercice 172

Calculer les intégrales suivantes.

1 $\displaystyle\int (8x^3 - 6x^2 + 1)\ dx$

2 $\displaystyle\int (9x^2 - 4x + 5)\ dx$

3 $\displaystyle\int \left(\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{5}x^2 + \tfrac{1}{10}\right)\ dx$

4 $\displaystyle\int \tfrac{10x^4 - 8x^3 + 3x^2}{12}\ dx$

5 $\displaystyle\int \tfrac{1}{x^2}\ dx$

6 $\displaystyle\int \tfrac{1}{x-1}\ dx$

7 $\displaystyle\int e^{-x}\ dx$

8 $\displaystyle\int \sin(2x)\ dx$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int (4 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 1)\ dx = 2x^4 - 2x^3 + x + c$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int (3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5)\ dx = 3x^3 - 2x^2 + 5x + c$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \left(5 \cdot \tfrac{1}{10}x^4 - \tfrac{3}{15} \cdot 3x^2 + \tfrac{1}{10}\right) dx = \tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{3}{15}x^3 - \tfrac{1}{10}x + c$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \tfrac{1}{12}\left(5 \cdot 2x^4 - 4 \cdot 2x^3 + 3 \cdot x^2\right) dx = \tfrac{1}{12}\left(2x^5 - 2x^4 + x^3\right) + c$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int x^{-2}\ dx = -x^{-1} + c$

$\boxed{6}$ $\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ $\quad$ $\boxed{7}$ $-e^{-x} + c$ $\quad$ $\boxed{8}$ $\dfrac{1}{2}\cos(2x) + c$

Exercice 173

Déterminer l'expression d'une primitive F de la fonction continue f sur l'intervalle I indiqué.

1 $f(x) = \frac{2}{x^3}$; $\quad I =]0;+\infty[$.

2 $f(x) = -\frac{3}{x^2}$; $\quad I =]-\infty;0[$.

3 $f(x) = \frac{1}{2x}$; $\quad I =]-\infty;0[$.

4 $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$; $\quad I =]0;+\infty[$.

5 $f(x) = (2x+1)^{2021}$; $\quad I = \mathbb{R}$.

6 $f(x) = x(1-x^2)^5$; $\quad I = \mathbb{R}$.

7 $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \cdot \frac{15}{(x+3)^2}$; $\quad I =]-3;+\infty[$.

8 $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$; $\quad I = \mathbb{R}$.

9 $f(x) = e^x(1-e^x)^2$; $\quad I = \mathbb{R}$.

10 $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^{2021}}$; $\quad I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

11 $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{11} \cdot \frac{-24}{(x-1)^2}$; $\quad I =]1;+\infty[$.

12 $f(x) = \frac{1}{x[\ln x]^2}$; $\quad I =]1;+\infty[$.

13 $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^4}$; $\quad I = \mathbb{R}$.

14 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; $\quad I =]1;+\infty[$.

15 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad I =]1;+\infty[$.

16 $f(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$; $\quad I =]1;+\infty[$.

$\boxed{1}$ $\forall x \in I$:

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ $\forall x \in I$:

$$F(x) = \frac{3}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{3}$ $\forall x \in I$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{4}$ $\forall x \in I$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} - \ln(|x|) + c$$

$$= \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{2}\cdot 2(2x+1)^{2021}$

$\forall x \in I$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2022}\cdot(2x+1)^{2022}$$

$$= \frac{1}{4044}(2x+1)^{2022}$$

$\boxed{6}$ $\forall x \in I$:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(1-x^2)^6 + c$$

$$= -\frac{1}{12}(1-x^2)^6 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{7}$ $\forall x \in I$: $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)' = \frac{x+3-x+2}{(x+3)^2}$

$$= \frac{5}{(x+3)^2}$$

Donc: $F(x) = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\boxed{8}$ $f(x) = (\sin(x))' \cdot \sin(x)$

$\forall x \in I$: $F(x) = \frac{1}{2}[\sin(x)]^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $f(x) = (1-e^x)' \cdot (1-e^x)^2$

$\forall x \in I$:

$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-e^x)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{10}$ $\forall x \in I$: $F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2020}\cdot\frac{1}{(2x-1)^{2020}}$

$$= -\frac{1}{4040}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2020}}$$

$\boxed{11}$ $\forall x \in I$: $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$F(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{12} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{12}$ $\forall x \in I$:

$F(x) = -\frac{1}{\ln(x)} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

$\boxed{13}$ $\forall x \in I : F(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{(1+e^x)^3} + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{14}$ $\forall x \in I : F(x) = 2\sqrt{x-1} + c, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{15}$ $\forall x \in I : F(x) = \sqrt{x^2-1} + c, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{16}$ $\forall x \in I : F(x) = \sqrt{e^x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

Exercice 174

Calculer les intégrales suivantes.

1 $\int e^{-2x+1}\,dx$

2 $\int xe^{-x^2+1}\,dx$

3 $\int (x+1)e^{x^2+2x-3}\,dx$

4 $\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx$

5 $\int \frac{2}{x-1}\,dx$

6 $\int \frac{-110}{(x-3)^2}\left(\frac{2x+5}{x-3}\right)\,dx$

7 $\int \frac{x-2}{-x^2+4x-3}\,dx$

8 $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

9 $\int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\,dx$

10 $\int 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\,dx$

$\boxed{1}$ $\int e^{-2x+1}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x+1} + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $\int xe^{-x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{-x^2+1} + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $\int (x+1)e^{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-3} + c, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx = e^{\sin(x)} + c, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ $\int \frac{2}{x-1}\,dx = 2\ln(|x-1|) + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{6}$ $\int \frac{-110}{(x-3)^2}\left(\frac{2x+5}{x-3}\right)dx$

$$\left(\frac{2x+5}{x-3}\right)' = \frac{1\cdot(2x+5) - 2(x-3)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x}+5-\cancel{2x}+6}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{11}{(x-3)^2}$$

D'où : $F(x) = \left(\frac{2x+5}{x-3}\right)$

$\boxed{7}$ $\int \frac{x-2}{-x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(|-x^2+4x-3|) + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\boxed{8}$ $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(|1+e^x|)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $\int \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{10}$ $\int 2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx = -2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Exercice 175

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1 $f(x) = \dfrac{3-6x}{(x^2-x)^3} \quad I =]0;1[$

2 $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-x} \quad I =]0;1[$

3 $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} \quad I =]1;+\infty[$

4 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad I =]0;+\infty[$

5 $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2+1}} \quad I = \mathbb{R}$

6 $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad I = \mathbb{R}$

7 $f(x) = \sin(2x-1) \quad I = \mathbb{R}$

8 $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

9 $f(x) = \sin^5(x)\cdot\cos(x) \quad I = \mathbb{R}$

10 $f(x) = \sin^3(x) \quad I = \mathbb{R}$

11 $f(x) = \cos^3(2x) \quad I = \mathbb{R}$

12 $f(x) = \sin^5(x) \quad I = \mathbb{R}$

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{3-6x}{(x^2-x)^3} = 3\,\frac{1-2x}{(x^2-x)^3}$

$\forall x\in I:\ F(x) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x^2-x)^2}$

$\boxed{2}$ $f(x) = 2\,\frac{2x-1}{x^2-x}$

$\forall x\in I:$

$F(x) = 2\ln(|x^2-x|)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $\forall x\in I:\ F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $\forall x\in I:\ F(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{5}$ $f(x) = xe^{-x^2-1} = -\frac{1}{2}(-2)e^{-x^2-1}$

$\forall x\in I:\ F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2-1}+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\forall x\in I:\ F(x) = \ln(e^{2x}+1)-x+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{7}$ $\forall x\in I:\ F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{8}$ $f(x) = \tan(x)$

$\forall x\in I:\ F(x) = -\cot(x)+c$

$= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $\forall x\in I:\ \frac{1}{6}\cdot\sin^6(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$\boxed{10}$ $f(x) = \sin^2(x)\cdot\sin(x)$

$= [1-\cos^2(x)]\cdot\sin(x)$

$= \sin(x)-\sin(x)\cdot\cos^2(x)$

$\forall x\in I:\ F(x) = -\cos(x)-\frac{1}{3}\cos^3(x)$

$\boxed{11}$ $f(x) = \cos^2(2x)\cdot\cos(2x)$

$= [1-\sin^2(2x)]\cdot\cos(2x)$

$= \cos(2x)-\cos(2x)\cdot\sin^2(2x)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(2x)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(2x)\cdot\sin^2(2x)$

$\forall x\in I:\ F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{6}\cdot\sin^3(2x)$

$\boxed{12}$ $f(x) = \sin(x) \cdot [\sin^2(x)]^2$

$$= \sin(x) \cdot [1 - \cos^2(x)]^2$$

$$= \sin(x) [1 + \cos^4(x) - 2\cos^2(x)]$$

$$= \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos^4(x) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

$$= \sin(x) + 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin(x) \cdot \cos^4(x) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

$\forall x \in I: \ F(x) = -\cos(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3} \cdot \cos^3(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$